BEWEIS EINES BEKANNTEN SATZES ÜBER TRANSPOSITIONEN

VON

AXEL THUE

(Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Math.-Naturv. Klasse 1910. No. 2)

UDGIVET FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD
1910

Fremlagt i den math.-naturv. Klasses Møde 19. November 1909.

A. W. BRØGGERS BOGTRYKKERI.

Es seien $G_1\ G_2 \cdots\cdots G_n$ eine willkürliche Anzahl verschiedener Gegenstände, die auf ebenso vielen Plätzen $P_1\ P_2 \cdots\cdots P_n$ so angebracht sind, dass auf jedem Platze einer und nur einer der Gegenstände steht.

Vertauscht man die zwei Gegenstände zweier Plätze, indem jeder von ihnen auf den Platz des anderen gestellt wird, nennen wir diese Operation eine Transposition der Gegenstände.

Satz. *Ist man bei einer solchen Placierung der n Gegenstände G auf den n Plätzen P wieder zu derselben nach q Transpositionen der Gegenstände gekommen, so muss q immer eine gerade Zahl sein.*

Beweis. Man sieht gleich, dass der Satz richtig ist für $n = 2$. Wir brauchen folglich nur zu zeigen, dass der Satz auch richtig wird für $n = p + 1$, wenn er richtig für ist $n = p$.

Indem also $n = p + 1$, wollen wir durch

$$N_1\ N_2\ N_3 \cdots\cdots N_q\ N_{q+1} \qquad \ldots\ldots (1)$$

eine solche Reihe von Placierungen der genannten Art bezeichnen, dass man jede der Placierungen N_x und N_{x+1} für jede der betreffenden Zahlen x aus der anderen durch eine Transposition erhalten kann.

Wird dann die letzte Placierung N_{q+1} dem ersten N_1 gleich, so sollen wir also beweisen, dass q hier immer eine gerade Zahl sein muss.

Es sei nun G eine willkürlich gewählte der n Gegenstände und P eine willkürlich gewählte der n Plätze.

Ferner bezeichnen wir durch

$$M_1\ M_2\ M_3 \cdots\cdots M_q\ M_{q+1} \qquad \ldots\ldots (2)$$

eine solche Reihe von Placierungen der $p + 1$ Gegenstände auf die $p + 1$ Plätze, dass M_x für jeden der betreffenden Werte von x mit N_x identisch wird, wenn G durch die Placierung N_x auf den Platz P gestellt ist, während M_x im entgegensetzten Falle von N_x hergeleitet ist durch die Transposition, wodurch G auf den Platz P gestellt wird.

Man sieht dann gleich ein, dass M_x und M_{x+1} immer einander gleich sein müssen, wenn G auf den Platz P bei einer und nur bei einer der Placierungen N_x und N_{x+1} gestellt ist. Also wenn N_x und N_{x+1} durch eine solche Transposition überführt werden, dass der Gegenstand G hierdurch entweder auf den Platz P gestellt oder von dem Platze P entfernt wird.

In allen anderen Fällen geht jede der zwei Placierungen M_x und M_{x+1} in die anderen durch eine Transposition über.

Ist der Gegenstand G durch einige von den q Transpositionen im ganzen r Male auf den Platz P gestellt, so muss er auch, da G auf demselben Platz in N_1 und N_{q+1} steht, r Male von dem Platze entfernt geworden sein.

Für $2r$ Werte von x bezeichnen also M_x und M_{x+1} dieselbe Placierung.

Aus der Reihe (2) können wir nun eine neue bilden, indem wir eine beliebige der Bezeichnungen M_x und M_{x+1} wegnehmen, wenn M_x und M_{x+1} dieselbe Placierung bezeichnen. Aus der erhaltenen Reihe können wir wieder auf dieselbe Weise eine neue bilden. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir zuletzt eine Reihe (3) von $q + 1 - 2r$ Gliedern, wo je zwei nach einander folgende Glieder zwei Placierungen bezeichnen, die durch eine Transposition in einander überführt werden können.

Da das erste und das letzte Glied der Reihe (2) und also auch die entsprechenden Glieder der Reihe (3) dieselbe Placierung bezeichnen, so muss die Anzahl $q - 2r$ der Transpositionen der Reihe (3) eine gerade Zahl sein.

Entfernt man nämlich von allen $q + 1 - 2r$ Placierungen (3) den Platz P mit dem auf ihm stehenden Gegenstand G, so erhält man eine Reihe

$$R_1 \; R_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot R_{q+1-2r}$$

von $q + 1 - 2r$ Placierungen der restierenden p Gegenstände auf den restierenden p Plätzen, wo R_1 und R_{q+1-2r} dieselbe Placierung bedeuten, während R_y und R_{y+1} für jeden der betreffenden Werte von y durch eine Transposition in einander überführt werden können.

Nach unserer Voraussetzung über die Zahl p muss hier folglich die Anzahl $q - 2r$ der Transpositionen eine gerade Zahl sein.

q muss also, wie behauptet, auch eine gerade Zahl sein.

Lian, d. 15. November 1909.

Gedruckt am 3. November 1910.